Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Georg August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Antonie Stern
aus Dortmund.

Göttingen 1925.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1924.
Referent: Professor Dr. Courant.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Die folgenden Bemerkungen beschäftigen sich mit einer Reihe von Fragen, die nur in losem Zusammenhang zu einander stehen, jedoch alle dem gleichen Problemkreis angehören. Ihre Untersuchung dient dem Zweck, Material über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen partieller elliptischer, sich selbst adjungierter Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu sammeln. Dabei sind unter Eigenwerten diejenigen Konstanten λ_n verstanden, für die die vorgelegte Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda k u = 0,$$

in der $L(u)$ einen sich selbst adjungierten partiellen elliptischen Differentialausdruck bezeichnet, bei vorgegebener Randbedingung auf dem Rande des betrachteten Gebiets G eine nicht identisch verschwindende, im Innern und auf dem Rande von G stetige Lösung besitzt; die Eigenfunktionen u_n sind die zu diesen Werten λ_n gehörigen Lösungen der Differentialgleichung.

Zunächst behandeln wir das Problem der Knoten der Eigenfunktionen d. h. der Linien bezw. Flächen, auf denen die Eigenfunktionen verschwinden, und zwar für die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ im Quadrat bei der Randbedingung $u = 0$ bezw. auf der Kugelfläche, wobei an Stelle der Randbedingung die Forderung der Stetigkeit auf der ganzen Kugelfläche tritt. Im eindimensionalen Fall wird nach den Sätzen von Sturm[1]) das Intervall durch die Knoten der $n$ten Eigenfunktion in n Teilgebiete zerlegt. Dies Gesetz verliert seine Gültigkeit bei mehrdimensionalen Eigenwertproblemen, wie im ersten Teil dieser Arbeit, der der Untersuchung dieser und daran anschließender Fragen gewidmet ist, nachgewiesen wird; es läßt sich beispielsweise leicht zeigen, daß auf der Kugel bei jedem Eigenwert die Gebietszahlen 2 oder 3 auftreten, und daß bei Ordnung nach wachsenden Eigenwerten auch beim Quadrat

1) Journal de Mathématiques, T. I, 1836, p. 106—186, 269—277, 375—444.

die Gebietszahl 2 immer wieder vorkommt. Im Anschluß hieran werden die Gestalt der Knotenlinien für bisher nicht in der Literatur behandelte Fälle diskutiert und Gesetzmäßigkeiten über die Gebietsanzahl gesammelt. Die Suche nach einem asymptotischen Gesetz wird sich als gegenstandslos erweisen.

Im zweiten Teil werden wir eine asymptotische Eigenschaft der Eigenwerte nicht in ihrer Abhängigkeit von der Stellenzahl, sondern von der Randbedingung ableiten, und zwar werden bei der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$$

für $\sigma \to -\infty$ die Gesamtheit der positiven und negativen Eigenwerte in Bezug auf ihre Größenordnungen miteinander verglichen.

Die der Fakultät eingereichte Dissertation enthielt ferner zwei einfache Verallgemeinerungen von Resultaten der Courantschen Abhandlung: Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik[1]), sowie eine Untersuchung der Frage, ob und inwiefern für den Mittelwert $\iint_{G'} \bar{u}_n^2 \, dg$, wo G' ein Teilgebiet von G und $\bar{u}_n$ die normierte $n$te Eigenfunktion bezeichnet, $\iint_G \bar{u}_n^2 \, dg = 1$, für $n \to \infty$ ein von n unabhängiger Grenzwert existiert. Da diese Frage im allgemeinen zu verneinen ist, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden; doch wollen wir kurz über die Ergebnisse der oben erwähnten Untersuchungen berichten. Courant betrachtet in der zitierten Abhandlung das Eigenwertproblem der Differentialgleichung $L(u) + \lambda k u = 0$:

$$p \Delta u + p_x u_x + p_y u_y + (-q + \lambda k) u = 0$$

in einem ebenen Gebiet G, wo $p > 0$, p_x, p_y, q und $k > 0$ stetige Funktionen in G sein sollen, bei irgend einer homogenen Randbedingung und definiert die Eigenwerte durch ein Maximum-Minimumproblem. Die erwähnten Verallgemeinerungen betrafen 1. die Aufhebung der Vorzeichenbeschränkung $k > 0$ und 2. die Übertragung auf geschlossene krumme Flächen, wobei an Stelle der Randbedingung die Forderung der Stetigkeit auf der ganzen Fläche trat.

Im ersten Falle konnte, falls $q = 0$ und die in der Randbedingung auftretende Funktion $\sigma \geqq 0$ gesetzt wurde, der $n$te positive bezw. negative Eigenwert je durch ein Maximum-Minimumproblem bestimmt werden, sodaß sich die ausschließlich auf der Maximum-

1) Mathematische Zeitschrift, Bd. 7, 1920, S. 1—57.

Minimumdefinition der Eigenwerte beruhenden Sätze der Courantschen Abhandlung sinngemäß übertragen ließen. Dann ergab sich bei jeder der betrachteten Randbedingungen, falls mit G_{I} und G_{II} die Teilgebiete von G bezeichnet wurden, in denen $k \geqq 0$ bezw. $k \leqq 0$ ist, und $A(\lambda)$ die Zahl der positiven Eigenwerte $\leqq \lambda$ darstellt, für $\lambda \to \infty$

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G_{\mathrm{I}}} \frac{k}{p}\, dx\, dy$$

und entsprechend für die Zahl $B(\lambda)$ der negativen Eigenwerte, die absolut genommen $\leqq \lambda$ sind

$$B(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G_{\mathrm{II}}} \frac{|k|}{p}\, dx\, dy.$$

Die Gesamtanzahl $A^*(\lambda)$ der Eigenwerte der Differentialgleichung, die absolut genommen $\leqq \lambda$ sind, ist daher bei allen in Betracht kommenden Randbedingungen durch

$$A^*(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G} \frac{|k|}{p}\, dx\, dy$$

gegeben, während $\frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G} \frac{k}{p}\, dx\, dy$ die Differenz der asymptotischen Anzahlen von positiven und negativen Eigenwerten bestimmt. Ist demnach $\iint_{G} \frac{k}{p}\, dx\, dy = 0$, so gibt es asymptotisch gleich viel positive und negative Eigenwerte.

Durch Anwendung der Resultate von § 9 der Courantschen Abhandlung auf die Differentialgleichung $L(u) + \lambda k u = 0$ ergab sich die genauere Abschätzung

$$A^*(\lambda) \leqq \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{G} \frac{|k|}{p}\, dx\, dy + C\left(\frac{|k|_{\mathrm{Max}}}{p_{\mathrm{Min}}}\right)_G \sqrt{\lambda} \log \lambda,$$

wo C eine allgemeine von k und p unabhängige Konstante ist.

Die Übertragung auf geschlossene krumme Flächen erfolgte mittels konformer Abbildung einzelner Teile der Fläche auf die Ebene; die durch diese konforme Abbildung transformierte Differentialgleichung in der Ebene besitzt dann die gleichen Eigenwerte wie die ursprüngliche Differentialgleichung auf der Fläche. Weiter lassen sich die in der Ebene gültigen Sätze über die zu den Randbedingungen $u = 0$ bezw. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte von Teilgebieten verglichen mit denen des ursprünglichen Gebiets auf die geschlossene Fläche übertragen. Auf Grund dieser beiden

Tatsachen ergibt sich dann leicht, wenn F die geschlossene Fläche und $d\sigma$ das Flächenelement bezeichnet, die asymptotische Verteilungsformel

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \int\int_F \frac{k}{p} d\sigma,$$

die sich für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ auf der Kugelfläche unmittelbar verifizieren läßt.

I. Über die Knotenlinien der zu der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gehörigen Eigenfunktionen des Quadrats und der Kugelfläche.

§ 1. Nichtgültigkeit des Sturmschen Satzes für partielle Differentialgleichungen; Vorkommen der Gebietszahlen 2 und 3 und aller Gebietszahlen $\equiv 0, 2, 3 (4)$ auf der Kugelfläche.

Eines der wichtigsten Resultate der Sturm-Liouvilleschen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist folgender Satz:

Ordnet man die Eigenfunktionen der selbstadjungierten Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda k u = (p u')' - q u + \lambda k u = 0, \quad p(x) > 0, \quad k(x) > 0$$

für ein gegebenes Intervall $a \leqq x \leqq b$ und gegebene homogene Randbedingungen nach wachsenden Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$, so teilen die Nullstellen der $n$ten Eigenfunktion u_n das Intervall in genau n Teilintervalle.

Daß die eine Hälfte dieses Satzes allgemein bei partiellen Differentialgleichungen bestehen bleibt, nämlich daß n immer eine obere Schranke für die Anzahl der Teilgebiete ist, in die das Grundgebiet durch die Nullstellen der $n$ten Eigenfunktion zerlegt wird, hat Courant[1]) bewiesen. Ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Ordnung der Differentialgleichung sowie über die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen zeigte er, daß bei Ordnung nach wachsenden Eigenwerten die $n$te Eigenfunktion u_n einer sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda k u = 0, \quad k > 0$$

für ein Gebiet G bei homogenen Randbedingungen durch ihre Nullstellen das Gebiet G in nicht mehr als n Teilgebiete teilt.

1) Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. Göttinger Nachrichten 1923, Math.-phys. Klasse, S. 81—84.

Die andre Hälfte des Sturm-Liouvilleschen Satzes, daß die Anzahl der betreffenden Teilgebiete mindestens n ist, gilt für partielle Differentialgleichungen nicht mehr, wie hier an den einfachsten Beispielen, den einzigen, in denen man die Eigenwerte explicite kennt, gezeigt werden soll.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

wo Δu den Laplaceschen Differentialausdruck darstellt, auf der Kugel vom Radius 1; die Eigenwerte sind

$$\lambda_n = l(l+1) \qquad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

die Eigenfunktionen abgesehen von der Normierung

$$P_{l,m}(\cos\vartheta)\cos m\varphi \quad \text{und} \quad P_{l,m}(\cos\vartheta)\sin m\varphi,$$

wo ϑ den Polabstand und φ die Länge bezeichnet, $0 \leqq m \leqq l$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ und

$$P_{l,m}(z) = C_m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l(z)}{dz^m}$$

$$P_{l,0}(z) = P_l(z) = C_0\frac{d^l(z^2-1)^l}{dz^l}$$

ist. Hiernach ist P_l eine ganze rationale Funktion $l$ten Grades von $\cos\vartheta$, $P_{l,m}$ eine solche $(l-m)$ten Grades, multipliziert mit $\sin^m\vartheta$, und der Eigenwert $\lambda_n = l(l+1)$ ist $(2l+1)$fach, da $2l+1$ linear unabhängige Eigenfunktionen zu ihm gehören.

Das Knotenliniensystem der Funktionen $P_{l,m}(\cos\vartheta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$ besteht aus $(l-m)$ Breitenkreisen und m gleichmäßig verteilten Meridianen, also speziell das von

$P_{l,l}(\cos\vartheta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} l\varphi$ aus l Meridianen, das von

$P_l(\cos\vartheta)$ aus l Breitenkreisen.

Zunächst wollen wir zeigen, daß es zu jedem Eigenwert Eigenfunktionen gibt, deren Nullinien die Kugelfläche nur in zwei oder drei Gebiete teilen.

Hierzu betrachten wir die Eigenwerte

$$\lambda_n = (2r+1)(2r+2) \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

und die Funktionen

$$P_{2r+1,\,2r+1}(\cos\vartheta)\cos(2r+1)\varphi \quad \text{und} \quad P_{2r+1}(\cos\vartheta),$$

deren Nulliniensystem aus $2r+1$ Meridianen bezw. Breitenkreisen besteht. In den von den Nullinien begrenzten Gebieten ist $P_{2r+1,\,2r+1}(\cos\vartheta)$

$\cos(2r+1)\varphi$ bezw. $P_{2r+1}(\cos\vartheta)$ abwechselnd positiv und negativ. Legen wir die beiden Knotenliniensysteme übereinander und schraffieren wir die Gebiete, in denen beide Funktionen gleiches Vorzeichen haben, so kann die Knotenlinie der Kugelfunktion

$$P_{2r+1,2r+1}(\cos\vartheta)\cos(2r+1)\varphi+\mu P_{2r+1}(\cos\vartheta), \qquad \mu>0$$

nur in den nichtschraffierten Gebieten verlaufen und zwar für hinreichend kleine μ in beliebiger Nachbarschaft der Knotenlinien von $P_{2r+1,2r+1}(\cos\vartheta)\cos(2r+1)\varphi$, d. h. der $2r+1$ Meridiane, da sich bei stetiger Änderung von μ das Knotenliniensystem stetig ändert (Fig 1). Da die Knotenlinie ferner durch die $2(2r+1)^2$ Schnittpunkte der Nullinien der beiden obenstehenden Kugelfunktionen gehen muß, während die Pole ihr nicht mehr angehören können, — die Summe der beiden Funktionen verschwindet in ihnen nicht, — kann sie nur den gezeichneten Verlauf haben; sie besteht also aus einem Zuge und teilt die Kugelfläche in zwei Gebiete.

Die Gebietszahl zwei tritt somit bei allen Eigenwerten $\lambda_n = (2r+1)(2r+2)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, auf; ebenso wollen wir jetzt zeigen, daß die Gebietszahl drei bei allen Eigenwerten

$$\lambda_n = 2r(2r+1) \qquad r = 1, 2, \ldots$$

immer wieder vorkommt. Demnach ist die untere Grenze der durch die Nullinien der Eigenfunktionen bewirkten Gebietseinteilung für alle Eigenwerte zwei bezw. drei.

Die Kugelfunktion

$$P_{2r,2r}(\cos\vartheta)\cos 2r\varphi+\mu P_{2r,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi+\frac{\varepsilon\pi}{2r}\right), \qquad 0<\varepsilon<1$$

hat die Pole zu einfachen Nullstellen; die zugehörige Knotenlinie muß also die Pole einmal enthalten. Das Vorzeichen der Größe μ hat auf den Charakter der Knotenlinie keinen Einfluß, da die Verteilung der schraffierten und nichtschraffierten Gebiete auf der Kugelfläche vollkommen symmetrisch ist; ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir daher immer $\mu > 0$ annehmen. (Die Schraffierung wird weiterhin fortgelassen, um die Figuren übersichtlicher zu gestalten.) Für hinreichend kleine μ läuft die vom Nordpol ausgehende und längs der Meridiane verlaufende Knotenlinie zum Nordpol zurück (Fig. 2). Die entsprechende, in sich geschlossene Knotenlinie geht auf der Hinterseite der Kugel vom Südpol aus und zum Südpol zurück. Da das Restgebiet auf der Kugel zusammenhängend ist, erhalten wir die Gebietszahl drei für alle Eigenwerte $\lambda_n = 2r(2r+1)$, $r = 1, 2, \ldots$.

Von der letzten Figur ausgehend wollen wir jetzt zeigen, daß

alle ungeraden Zahlen $\equiv 3\,(4)$ sich als Gebietszahlen auf der Kugelfläche immer wiederholen.

Hierzu betrachten wir für ungerade s die Kugelfunktion

$$P_{2rs,\,2rs}(\cos\vartheta)\cos 2rs\varphi + \mu P_{2rs,\,s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2rs}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

bei der die Pole nur noch $s$fache Nullstellen sind (Fig. 3). Deren Nulliniensystem teilt für hinreichend kleine μ bei festem s für alle r die Kugel in $2s+1$ Gebiete, da immer $2r$ Meridiane von $P_{2rs,\,2rs}(\cos\vartheta)\cos 2rs\varphi$ zwischen je zwei Meridianen von

$$P_{2rs,\,s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2rs}\right)$$

liegen, sodaß alle von den Polen ausgehenden und längs der Meridiane verlaufenden Nullinien infolge der ungraden Anzahl $(2r-1)s$ der Breitenkreise zu den Polen zurücklaufen. Wegen der ungraden Gebietszahl zwischen zwei Meridianen von $P_{2rs,\,s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2rs}\right)$ müssen die Knotenlinien abwechselnd vom Nord- und Südpol ausgehen. Sie umschließen $2s$ Gebiete, und da das Restgebiet auf der Kugel zusammenhängend ist, zerfällt diese in $2s+1$ Teile für alle r.

Ähnlich können wir zeigen, daß auch alle graden Zahlen als Gebietszahlen auf der Kugelfläche unendlich oft vorkommen. Hierzu konstruieren wir zunächst einen andern Typus für die Gebietszahl zwei mit Hilfe der Kugelfunktion

$$\mu P_{2r+1,\,2r+1}(\cos\vartheta)\cos(2r+1)\varphi + P_{2r+1,\,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{2r+1}\right),$$
$$0 < \varepsilon < 1$$

für hinreichend kleine μ (Fig. 4). Die Knotenlinie verläuft im Zickzack längs der Parallelkreise auf jeder Halbkugel vom Nord- zum Südpol; sie besteht demnach aus einem Zuge und teilt die Kugel in zwei Gebiete.

Betrachten wir nun die Kugelfunktion

$$\mu P_{s(2r+1),\,s(2r+1)}(\cos\vartheta)\cos s(2r+1)\varphi + P_{s(2r+1),\,s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right),$$
$$0 < \varepsilon < 1$$

für hinreichend kleine μ, so zerlegt die zugehörige Knotenlinie bei festem s für alle Werte r die Kugelfläche in $2s$ Gebiete (Fig. 5). Da zwischen je zwei Meridianen von $P_{s(2r+1),\,s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right)$ $2r+1$ Meridiane von $P_{s(2r+1),\,s(2r+1)}(\cos\vartheta)\cos s(2r+1)\varphi$ liegen, läuft

die Knotenlinie im Zickzack längs der Breitenkreise zwischen je zwei Meridianen von $P_{s(2r+1),s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi+\frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right)$ vom Nord- zum Südpol. Das Knotenliniensystem ist daher ein stetiges Bild des Meridiansystems von $P_{s(2r+1),s}(\cos\vartheta)\cos s\left(\varphi+\frac{\varepsilon\pi}{s(2r+1)}\right)$, d. h. der s Meridiane und teilt demnach die Kugel in $2s$ Gebiete für alle Werte r.

Von dem ersten Typus für die Gebietszahl zwei aus können wir auch noch auf andre Weise einen Typus für die Gebietszahl drei gewinnen, und zwar mit Hülfe der Kugelfunktion

$$\mu P_{4r+2}(\cos\vartheta)+P_{4r+2,4r+1}(\cos\vartheta)\cos(4r+1)\varphi$$

für hinreichend kleine μ, wie unmittelbar aus der Figur 6 ersichtlich ist. Eine Verallgemeinerung dieses Typs auf beliebige Zahlen ist aber nicht möglich, da für $l\to\infty$ bei festem s die s Wurzeln von $P_{l,l-s}(\cos\vartheta)$ alle gegen null konvergieren.

§ 2. Vorkommen der Gebietszahl zwei beim Quadrat.

Wir wollen nun zeigen, daß auch beim Quadrat die Gebietszahl zwei immer wieder auftritt.

Hat das Quadrat die Seitenlänge π, so sind bei der Randbedingung $u=0$ die zugehörigen Eigenwerte

$$\lambda_n=\lambda_{l,m}=l^2+m^2 \qquad l,m=1,2,\ldots,$$

die Eigenfunktionen

$$u_n=u_{l,m}=\frac{2}{\pi}\sin lx\sin my.$$

Nur für $l=m$ ist der zugehörige Eigenwert einfach; für $l\neq m$ ist er mindestens zweifach; denn es gehören zu ihm die linear unabhängigen Eigenfunktionen $u_{l,m}$ und $u_{m,l}$ und damit auch alle geeignet normierten linearen Kombinationen dieser Funktionen.

Die zum Eigenwert $\lambda_n=\lambda_{l,m}=l^2+m^2$ gehörigen Knotenlinien sind allgemein in der Form

$$\sin lx\sin my+\mu\sin mx\sin ly=0,$$

$$u_{l,m}+\mu u_{m,l}=0,$$

$$|\mu|\leqq 1$$

gegeben; die Werte $|\mu|>1$ brauchen nicht berücksichtigt zu werden; die Knotenlinien für diese Werte von μ werden durch Vertauschung von x und y, d. h. Spiegelung an der Quadratdiagonalen aus den früheren erhalten.

Um den typischen Verlauf der Knotenlinie zu bestimmen, haben wir ähnliche Anhaltspunkte wie auf der Kugelfläche.

Legen wir die Knotenliniensysteme von $u_{l,m}$ ($l-1$ Parallelen zur y-Achse, $m-1$ zur x-Achse) und $u_{m,l}$ ($m-1$ Parallelen zur y-, $l-1$ zur x-Achse) übereinander, so kann für $\mu \gtrless 0$ (< 0) die Knotenlinie nur in den Gebieten verlaufen, in denen beide Funktionen verschiedenes (gleiches) Vorzeichen haben. Weiter müssen alle zum Eigenwert $\lambda_{l,m}$ gehörigen Knotenlinien durch die Schnittpunkte der Liniensysteme $u_{l,m} = 0$ und $u_{m,l} = 0$, also durch $(l-1)^2+(m-1)^2$ feste Punkte hindurchgehen, da diese Punkte die Gleichung jeder Knotenlinie erfüllen. Dagegen können die $(l-1)(m-1)$ Doppelpunkte der Knotenlinie von $u_{l,m}$ für $\mu \neq 0$ nicht mehr der Knotenlinie angehören. Schließlich schneiden sich zwei bezw. mehrere zu dem gleichen Eigenwert gehörige Knotenlinien senkrecht bezw. unter gleichen Winkeln[1]).

Wir betrachten die Eigenwerte

$$\lambda_n = \lambda_{2r,1} = 4r^2+1, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

und die Knotenlinie der zugehörigen Eigenfunktion

$$u_{2r,1} + u_{1,2r} = 0,$$

für die sich, wie leicht mittels graphischer Bilder nachgewiesen werden kann, die Figur 7 ergibt. Die Diagonale

$$y = \pi - x$$

ist enthalten, da $y = \pi - x$ die Gleichung der Knotenlinie identisch erfüllt. Lassen wir nun μ von $\mu = 1$ aus abnehmen, so lösen sich die Doppelpunkte der Knotenlinie alle gleichzeitig und im gleichen Sinne auf, und es ergibt sich die Figur 8. Da die Knotenlinie aus einem doppelpunktlosen Zuge besteht, teilt sie das Quadrat in zwei Gebiete und zwar geschieht dies für alle Werte $r = 1, 2, \ldots$, also alle Eigenwerte $\lambda_n = \lambda_{2r,1}^{r} = 4r^2+1$.

§ 3. Erläuterung der bei den Quadratzeichnungen benutzten Methode.

Im Anschluß an dies Resultat, das, wie die Untersuchungen auf der Kugelfläche, die Nichtgültigkeit des Sturmschen Satzes für partielle Differentialgleichungen beweist, scheint es von Interesse, die Gestalt der Knotenlinien für Fälle zu untersuchen, die bisher nicht in der Literatur behandelt worden sind und nach Gesetzmäßigkeiten für die Gebietsanzahl zu forschen. Hierzu soll

1) Siehe Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891. S. 225.

im Folgenden einiges Material zusammengestellt werden, wobei, soweit Figuren auf der Kugelfläche in Frage kommen, nur der typische Verlauf der Knotenlinie angegeben werden kann, während unter Zuhilfenahme graphischer Bilder die Knotenlinien des Quadrats leicht mit beliebiger Genauigkeit gezeichnet werden können. Die Methode ist im wesentlichen schon an den früheren Beispielen auseinandergesetzt worden; es bleibt nur ein Wort über die beim Quadrat erwähnten graphischen Bilder zu sagen.

Da sich die mehrfachen Eigenwerte beim Quadrat der allgemeinen Betrachtung entziehen, beschränken wir uns auf zweifache Eigenwerte, bezw. bei mehrfachen Eigenwerten auf die Knotenlinien, die einparametrigen Scharen zusammengehöriger Eigenfunktionen $u_{l,m}$ und $u_{m,l}$ entsprechen. Ferner dürfen wir uns allgemein auf Eigenwerte beschränken, die relativ primen Wertepaaren l, m zukommen, da falls $l, m = al_1, am_1$ und l_1, m_1 relativ prim sind, das Quadrat in a^2 Teilquadrate zerfällt, sodaß in jedem von diesen für jeden Wert von μ die Knotenlinie den dem Eigenwert $l_1^2 + m_1^2$ entsprechenden Typus zeigt. Unter dieser Voraussetzung der Teilerfremdheit von l, m spielt das Vorzeichen der Größe μ nur eine Rolle, wenn l, m beide ungrade sind; ist eine der beiden Größen grade, so entspricht einer Änderung des Vorzeichens von μ eine Spiegelung der Figur an der Graden $y = \frac{\pi}{2}$ oder $x = \frac{\pi}{2}$.

Ist nun der Eigenwert

$$\lambda_n = \lambda_{l,m} = l^2 + m^2, \qquad l > m$$

gegeben, hat also die Knotenlinie die Gleichung

$$\sin lx \sin my + \mu \sin mx \sin ly = 0,$$

so haben wir m^2 Teilquadrate, durch deren Ecken die Knotenlinie für alle Werte von μ gehen muß, und in deren Innern $\left[\frac{l}{m}\right]^2$, $\left[\frac{l}{m}\right]\left(\left[\frac{l}{m}\right]+1\right)$ oder $\left(\left[\frac{l}{m}\right]+1\right)^2$ feste Punkte der Knotenlinie liegen, die auch eine Quadrateinteilung des ursprünglichen Quadrats und zwar in l^2 Teilquadrate liefern.

Die Untersuchung, ob in irgend einem dieser Teilquadrate eine bestimmte Parallele zur x- oder y-Achse Schnittpunkte mit der Knotenlinie hat, wird folgendermaßen graphisch geführt. Wir zeichnen z. B. für festes $\bar{y}$ das Kurvenpaar

$$\sin lx \sin m\bar{y} \quad \text{und} \quad -\mu \sin mx \sin l\bar{y}.$$

Je nachdem diese Kurven in den Intervallen

$$r\frac{\pi}{l} < x < (r+1)\frac{\pi}{l} \qquad r = 0, 1, \ldots l-1$$

keinen, einen oder zwei Schnittpunkte, bezw. einen Berührungspunkt gemeinsam haben, hat die Parallele $y = \bar{y}$ keinen, einen oder zwei Schnittpunkte bezw. einen doppelten Schnittpunkt mit der Knotenlinie in den betreffenden Teilquadraten. Im letzten Falle liegt also ein Doppelpunkt der Knotenlinie vor.

Die Abweichung der Knotenlinie bei nicht verschwindendem μ von der Graden bei $\mu = 0$ ist aus der Lage der Schnittpunkte dieser zwei Kurven oder entsprechender Kurven für $x = \bar{x}$ zu entnehmen. Auf Grund dieser Bemerkung können wir, wie schon oben gesagt, die Knotenlinien des Quadrats mit beliebiger Genauigkeit zeichnen.

Diese Andeutungen mögen genügen; für die weiterhin gegebenen Figuren sind die graphischen Bilder nicht hinzugefügt.

§ 4. Einige Einzelfälle.

Beim Beweise, daß die Gebietszahl zwei beim Quadrat immer wieder vorkommt, hatten wir die den Eigenwerten

$$\lambda_n = \lambda_{2r,1} = 4r^2 + 1$$

entsprechenden Knotenlinien

$$\sin 2rx \sin y + \sin x \sin 2ry = 0$$

und

$$\sin 2rx \sin y + \mu \sin x \sin 2ry = 0,$$

wo $\mu < 1$ hinreichend nahe an 1 liegt, untersucht. Jetzt wollen wir die entsprechenden Figuren für die Eigenwerte

$$\lambda_n = \lambda_{2r+1,1} = (2r+1)^2 + 1 = 4r^2 + 4r + 2$$

zeichnen und zwar für $r = 5$, $\lambda_n = 122$.

$$\sin 11x \sin y + \sin x \sin 11y = 0$$

entspricht die Figur 9, während

$$\sin 11x \sin y - \sin x \sin 11y = 0$$

die Figur 10 zukommt. Liegt $|\mu| < 1$ hinreichend nahe bei 1, so erhalten wir für $\mu > 0$ ein entsprechendes Bild wie Figur 9, da kein Doppelpunkt vorhanden ist, für $\mu < 0$ die Figur 11.

Ist $|\mu|$ hinreichend klein, so ergibt sich für alle

$$\lambda_n = \lambda_{l,1} = l^2 + 1$$

als Knotenlinie eine Figur, in der die $l - 1$ Parallelen zur y-Achse durch Schlangenlinien mehr oder minder großer Ausbuchtung ersetzt sind (Fig. 12).

Wir betrachten weiterhin den Fall

$$m = l - 1$$

d. h.

$$\lambda_n = \lambda_{l,m} = \lambda_{l,l-1} = l^2 + (l-1)^2 = 2l(l-1) + 1$$

z. B. für $l = 7$, $\lambda_n = 85$ (Fig. 13).

Hier enthält jedes der 36 Teilquadrate in seinem Innern einen festen Punkt der Knotenlinie, während die 30 Doppelpunkte der Knotenlinie von $u_{7,6}$ auf den horizontalen, die von $u_{6,7}$ auf den vertikalen Seiten liegen. Hierdurch ist der Verlauf der Knotenlinie für $\mu \neq 0$ vollkommen festgelegt; wir erhalten ein Gebilde von 11 Kurvenzügen ohne Doppelpunkte, die das Quadrat in 12 Gebiete teilen, allgemein bei beliebigen l ein Gebilde von $2l-3$ doppelpunktlosen Kurvenzügen und $2l-2 = 2m$ Teilgebiete des Quadrats.

Ist ferner

$$m = 2,$$

so dürfen wir nach S. 12 l auf ungrade Werte beschränken: $l = 2r+1$. Wie sich aus der Formel

$$\sin(2r+1)x \sin 2y \pm \sin 2x \sin(2r+1)y = 0$$

ergibt, enthält die Knotenlinie für $\mu = \pm 1$ eine Diagonale. Den Größen $l = 11$, $m = 2$, $\lambda_n = 125$ entspricht für $\mu = -1$ die Figur 14.

Wesentlich andere Typen ergeben sich, wenn wir weiterhin die Werte m und $\left[\frac{l}{m}\right]$ betrachten und dann m oder $\left[\frac{l}{m}\right]$ festhalten und $\left[\frac{l}{m}\right]$ oder m variieren. Wir zeichnen z. B. die Fälle

$$l = 13, \quad m = 8, \quad \left[\frac{l}{m}\right] = 1, \quad \lambda_n = 233 \quad \text{(Fig. 15)}$$
$$\sin 13x \sin 8y - \sin 8x \sin 13y = 0.$$

$$l = 13, \quad m = 5, \quad \left[\frac{l}{m}\right] = 2, \quad \lambda_n = 194 \quad \text{(Fig. 16)}$$
$$\sin 13x \sin 5y + \sin 5x \sin 13y = 0.$$

$$l = 15, \quad m = 4, \quad \left[\frac{l}{m}\right] = 3, \quad \lambda_n = 241 \quad \text{(Fig. 17)}$$
$$\sin 15x \sin 4y - \sin 4x \sin 15y = 0.$$

$$l = 14, \quad m = 3, \quad \left[\frac{l}{m}\right] = 4, \quad \lambda_n = 205 \quad \text{(Fig. 18)}$$
$$\sin 14x \sin 3y - \sin 3x \sin 14y = 0.$$

Bei festem $\left[\frac{l}{m}\right]$ und veränderlichem m bleiben die verschiedenen Typen der Knotenlinie in den einzelnen Teilquadraten erhalten, je nachdem sie $\left[\frac{l}{m}\right]^2$, $\left[\frac{l}{m}\right]\left(\left[\frac{l}{m}\right]+1\right)$ oder $\left(\left[\frac{l}{m}\right]+1\right)^2$ feste Punkte der Knotenlinie enthalten. In den Quadraten mit $\left[\frac{l}{m}\right]^2$ bezw. $\left(\left[\frac{l}{m}\right]+1\right)^2$ festen Punkten zeigt die Knotenlinie ähnliche Typen wie die von $\lambda_{\left[\frac{l}{m}\right]+1,1}$ bezw. $\lambda_{\left[\frac{l}{m}\right]+2,1}$. Aus der Lage der Extremalwerte entsprechender Kurvenpaare für $|\mu| = 1$ ist ersichtlich, ob die den Doppelpunkten von $\lambda_{\left[\frac{l}{m}\right]+1,1}$ bezw. $\lambda_{\left[\frac{l}{m}\right]+2,1}$ entsprechenden Doppelpunkte sich noch nicht oder schon für $|\mu| < 1$ gebildet haben.

§ 5. Obere und untere Grenze der Gebietsanzahl.

Wir sahen, daß auf der Kugelfläche die untere Grenze für die Gebietsanzahl bei jedem Eigenwert die festen Werte zwei oder drei besitzt. Beim Quadrat ist es ebenfalls leicht, einen Wert für die untere Grenze der Gebietszahl anzugeben. Heißt der Eigenwert

$$\lambda_n = \lambda_{l,m} = l^2 + m^2, \qquad l > m,$$

so wird jedes der m^2 Teilquadrate durch die Knotenlinie in mindestens zwei Gebiete zerlegt, und da die Seiten dieser Teilquadrate nicht zur Knotenlinie gehören, ist somit die Gebietszahl

$$A \geqq 2m^2 - 2m(m-1) = 2m.$$

Diese untere Grenze $2m$ der Anzahl der Teilgebiete wird, wie wir oben sahen, bei den Eigenwerten

$$\lambda_n = (2r)^2 + 1,$$

für die der Wert zwei als Gebietszahl immer wieder auftritt, und bei den Eigenwerten

$$\lambda_n = l^2 + (l-1)^2, \qquad m = l-1$$

erreicht. Aus diesem Gesetz folgt, daß die Anzahl der Teilgebiete $\to \infty$ strebt, wenn beide Indizes $l, m \to \infty$ wachsen; konvergiert nur der Index $l \to \infty$, so gilt dies nicht, wofür die Knotenlinien von $\lambda_{2r,1}$, $r = 1, 2, \ldots$ ein Beispiel bilden.

Nicht ganz so einfach ist eine obere Grenze der Gebietszahl als Funktion des Eigenwerts beim Quadrat anzugeben. Bei den einfachen Eigenwerten

$$\lambda_n = 2l^2,$$

bezw. bei den zweifachen Eigenwerten

$$\lambda_n = l^2 + (l-1)^2, \qquad m = l-1$$

für die Eigenfunktionen $u_{l,l-1}$ oder $u_{l-1,l}$ zerfällt das Quadrat in l^2 Teilquadrate bezw. in $l(l-1)$ Rechtecke, d. h. in $\left[\frac{l^2+m^2}{2}\right]$ Gebiete. Die obere Grenze G für die Anzahl der Teilgebiete ist also

$$G \leqq \left[\frac{l^2+m^2}{2}\right].$$

Derselbe Wert der oberen Grenze gilt für die durch die Knotenlinien der Funktionen u_{lm} oder u_{ml} bewirkte Zerlegung des Quadrats, bei der das Quadrat in $l.m$ Teilgebiete zerfällt, da immer

$$l.m \leqq \left[\frac{l^2+m^2}{2}\right]$$

ist. Es läßt sich nachweisen, daß dieser Wert allgemein die obere Grenze für die Anzahl der zum Eigenwert l^2+m^2 gehörigen möglichen Teilgebiete des Quadrats darstellt:

$$G = \left[\frac{l^2+m^2}{2}\right];$$

doch soll hier nur die Methode angegeben, nicht der Beweis in allen Einzelheiten dargestellt werden.

Um die zu den Eigenfunktionen $u_{lm} + \mu u_{ml}$ für alle Werte $0 \leqq |\mu| \leqq 1$ gehörigen Knotenlinien berücksichtigen zu können, müssen wir die für diese Werte μ auftretenden Doppelpunkte kennen. Die größte Gebietszahl ergibt sich in dem irrealen Fall, daß alle diese Doppelpunkte gleichzeitig auftreten; wir erhalten so eine obere Schranke. Es folgt leicht, daß der Ausdruck

$$\frac{\left[\frac{l}{m}\right]^2}{4} + \frac{\left[\frac{l}{m}\right]}{2} + \frac{9}{4}$$

im allgemeinen das Maximum der Anzahl der in den m^2 Teilquadraten auftretenden Gebiete ist, und hieraus ergibt sich bei Berücksichtigung der Zusammenhangsverhältnisse — falls mehrfach zusammenhängende Gebiete auftreten, sind nicht immer alle Seiten der Quadratteilung zu subtrahieren —, daß für $\left[\frac{l}{m}\right] \geqq 3$ die Gebietsanzahl

$$A \leqq \left[\frac{l^2+m^2}{2}\right]$$

ist. Die Fälle $\left[\frac{l}{m}\right] = 1, 2$ liefern bei getrennter Untersuchung das gleiche Resultat.

Da für das Quadrat der Seitenlänge π asymptotisch

$$\lambda_n \sim \frac{4}{\pi} n + \vartheta c \sqrt{n} \qquad c = \text{const}, \; -1 < \vartheta < 1,$$

also

$$\left[\frac{l^2 + m^2}{2}\right] = \left[\frac{\lambda_n}{2}\right] \sim \frac{2}{\pi} n + \vartheta' c \sqrt{n}$$

gilt, ist für große zweifache Eigenwerte die obere Grenze der Gebietszahl sicher $< n$; für große zweifache Eigenwerte ist der Sturmsche Wert n somit ausgeschlossen.

Auf der Kugelfläche kann bei der jetzigen Kenntnis der Kugelfunktionen die obere Grenze der Gebietszahl als Funktion des betreffenden Eigenwerts nicht festgestellt werden; hierzu müßten genaue Sätze über die Lage der Nullstellen von $P_{l,m}$, $l > m$ $l, m = 1, 2, \ldots$ bekannt sein. Der dem Quadrat entsprechende Wert

$$\left[\frac{l^2 + l}{2}\right] = \left[\frac{\lambda_n}{2}\right]$$

ist jedenfalls nicht gültig, da die Knotenlinie der Kugelfunktion $P_{2r+1, r+1}(\cos\vartheta)\cos(r+1)\varphi$ $(\lambda_n = (2r+1)(2r+2))$ die Kugelfläche in

$$\left[\frac{l^2 + 2l + 1}{2}\right] = \left[\frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n} + 1}{2}\right]$$

Gebiete teilt; die obere Grenze ist also mindestens gleich diesem Wert. Der asymptotische Wert dieses Ausdrucks als Funktion des Stellenzeichens n des Eigenwerts λ_n ist auf der Kugel

$$\left[\frac{l^2 + 2l + 1}{2}\right] = \left[\frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n} + 1}{2}\right] \sim \frac{n}{2} + \vartheta'' \sqrt{n} \qquad 0 < \vartheta'' < 1;$$

der Wert $\frac{2}{\pi} n + \vartheta' c \sqrt{n}$ beim Quadrat ist also größer. Ob dieser asymptotische Wert der oberen Grenze der Gebietsanzahl auf der Kugelfläche bestehen bleibt, kann vorläufig nicht festgestellt werden.

§ 6. Unmöglichkeit eines asymptotischen Gesetzes der Gebietsanzahl.

Daß kein streng gültiges Gesetz für die Abhängigkeit der Gebietszahl vom Stellenzeichen des Eigenwerts besteht, ist nach den obigen Ausführungen ersichtlich; doch liegt es nahe, nach einem asymptotischen Gesetz für die Gebietsanzahl zu suchen. Da es hier wesentlich auf die Größenordnung der Abhängigkeit

ankommt, so ergibt der einfache Nachweis, daß auf der Kugelfläche bei allen Eigenwerten Gebietszahlen ganz verschiedener Größenordnungen auftreten, die Unmöglichkeit eines asymptotischen Gesetzes für die Gebietsanzahl. Die große Regellosigkeit, die der Verlauf der Knotenlinien auf der Kugelfläche zeigt, hat ihren Grund darin, daß die Vielfachheit der Eigenwerte λ_n mit λ_n wie $2[\sqrt{\lambda_n}]+1$ ins Unendliche wächst. Daß die Zahlen zwei oder drei bei jedem Eigenwert als Gebietszahlen vorkommen, haben wir S. 7, 8 gesehen, doch gibt es auch immer Gebietszahlen der Größenordnungen

$$l = [\sqrt{\lambda_n}] \sim \sqrt{n}$$

und

$$l^2 \sim \lambda_n \sim n.$$

Beispiele hierfür bieten die Nulliniensysteme von

$$\left.\begin{array}{l} P_l(\cos\vartheta) \text{ mit } l+1 = [\sqrt{\lambda_n}]+1 \text{ Gebieten und} \\ P_{l,l}(\cos\vartheta)\cos l\varphi \text{ mit } 2l = 2[\sqrt{\lambda_n}] \text{ Gebieten} \end{array}\right\} \lambda_n = l(l+1),$$

sowie von zahlreichen linearen Kombinationen wie z. B.

$$P_{2r+1,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi+\frac{\varepsilon\pi}{2r}\right)+\mu P_{2r+1,2r}(\cos\vartheta)\cos 2r\varphi, \quad 0<\varepsilon<1$$

für hinreichend kleine μ mit der Gebietszahl $l+1 = [\sqrt{\lambda_n}]+1$ (Fig. 19),

$$P_{4r,4r-1}(\cos\vartheta)\cos(4r-1)\varphi+\mu P_{4r}(\cos\vartheta)$$

mit der Gebietszahl $2l+1 = 2[\sqrt{\lambda_n}]+1$ (Fig. 20),

$$P_{2r,2r}(\cos\vartheta)\cos 2r\varphi+\mu P_{2r}(\cos\vartheta)$$

mit der Gebietszahl $l+1 = [\sqrt{\lambda_n}]+1$ (Fig. 21), und

$$P_{2r+1,r}(\cos\vartheta)\cos r\left(\varphi+\frac{\varepsilon\pi}{r+1}\right)+\mu P_{2r+1,r+1}(\cos\vartheta)\cos(r+1)\varphi,$$

$0<\varepsilon<1$, für hinreichend kleine μ. Da sich die Nullstellen dieser beiden Funktionen $P_{2r+1,r}$ und $P_{2r+1,r+1}$ trennen, erhalten wir die Figur 22 mit der Gebietszahl $l+1 = [\sqrt{\lambda_n}]+1$.

Bei der Kugelfunktion

$$P_{2r,2r-1}(\cos\vartheta)\cos(2r-1)\varphi+\mu P_{2r,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi+\frac{\varepsilon\pi}{2r-1}\right), \quad 0<\varepsilon<1$$

ist der Äquator Nullinie für beide Summanden, daher bildet er auch einen Bestandteil des Knotenliniensystems der Summe. Die Gebietszahl ist für hinreichend kleine μ: $2l = 2[\sqrt{\lambda_n}]$ (Fig 23).

Die Größenordnung $\lambda_n \sim n$ für die Gebietszahl liefern beispielsweise die Knotenliniensysteme der Funktionen

$P_{2r,r}(\cos\vartheta)\cos r\varphi$ mit $2r^2+4r = \left[\frac{\lambda_n+\sqrt{\lambda_n}}{2}\right]$ Gebieten und

$P_{2r+1,r+1}(\cos\vartheta)\cos(r+1)\varphi$ mit $2r^2+4r+2 = \left[\frac{\lambda_n+\sqrt{\lambda_n}+1}{2}\right]$ Gebieten.

Beim Quadrat treffen wir die gleiche Erscheinung z. B. bei den Eigenwerten $(2r)^2+1$ mit den Gebietszahlen 2 und $2r \sim \sqrt{\frac{4}{\pi}n}$ und den Eigenwerten $l^2+(l-1)^2$ mit den Gebietszahlen $2(l-1) \sim \sqrt{\frac{8}{\pi}n}$ und $l(l-1) \sim \frac{2}{\pi}n$ an. Die Suche nach einem asymptotischen Gesetz für die Gebietsanzahl ist also gegenstandslos.

§ 7. Bemerkung über dreidimensionale Probleme.

Zum Schluß möchte ich zeigen, daß diese Vorkommnisse nicht auf zweidimensionale Eigenwertprobleme beschränkt sind.

Betrachten wir z. B. die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0$$

für den Würfel von der Kantenlänge π bei der Randbedingung $u = 0$, so sind die zugehörigen Eigenwerte

$$\lambda_n = \lambda_{l,m,p} = l^2+m^2+p^2; \quad l, m, p = 1, 2, \ldots,$$

die Eigenfunktionen

$$u_n = u_{l,m,p} = \sqrt{\frac{8}{\pi^3}} \sin lx \sin my \sin pz,$$

sowie alle geeignet normierten linearen Kombinationen der durch Vertauschung von l, m, p entstehenden Funktionen.

Die Knotenflächen der Eigenfunktionen

$$u_{2r,1,1} + \mu u_{1,2r,1}$$

sind die Zylinder parallel zur z-Achse durch die S. 11 betrachteten Knotenlinien des Quadrats. Auch hier kommt also die Gebietszahl zwei immer wieder vor.

Der Übergang von der Kugelfläche zur Vollkugel bezw. zum Gesamtraum führt auf die Potentialgleichung, da jede Lösung von $\Delta u + \lambda u = 0$ für die Kugelfläche, d. h. von

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+l(l+1)u = 0$$

mit r^l multipliziert eine Lösung der Gleichung

$$\Delta u = 0$$

für den Raum, also ein räumliches Potential ergibt. Wir erhalten daher die Nullflächen dieses Potentials, indem wir durch die Knotenlinien auf der Kugelfläche die Kegel mit der Spitze im Kugelmittelpunkt legen. Es gibt demnach Potentiale, und zwar ganze homogene Funktionen von x, y, z beliebig hoher ungrader bezw. grader Ordnung, deren Nullflächen den Raum in zwei bezw. drei Gebiete zerlegen, und alle Zahlen $\equiv 0, 2, 3\,(4)$ wiederholen sich als Gebietszahlen bei wachsender Ordnung des Potentials unendlich oft.

II. Eine asymptotische Eigenschaft der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von der Randbedingung.

§ 1. Herleitung des Gesetzes für die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ im Kreis.

In den folgenden Zeilen handelt es sich um die Aufstellung eines asymptotischen Verteilungsgesetzes der Eigenwerte einer partiellen sich selbst adjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Gebiet G in ihrer Abhängigkeit von der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$$

beim Grenzübergang $\sigma \to -\infty$, wobei der Rand R von G aus endlich vielen stetig gekrümmten, sich unter endlichen Winkeln schneidenden Kurvenbögen bestehen, σ eine stückweise stetige Funktion auf R und ν die innere Normale zu R bedeuten möge. Dies Verteilungsgesetz der Eigenwerte kann für den Kreis bei der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und konstantem σ auf Grund der Kenntnis der Eigenfunktionen leicht abgeleitet und dann mit Hilfe einfacher Abschätzungen auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Es sei zunächst $\sigma = \text{const}$. Die Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

im Kreise mit dem Radius $\bar{r}$ sind Produkte von Besselschen mit trigonometrischen Funktionen $J_l(r\sqrt{\lambda}) \overset{\cos}{\underset{\sin}{}} l\varphi$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, und es gilt für σ die Beziehung

$$\sigma = -\sqrt{\lambda}\,\frac{J_l'(\bar{r}\sqrt{\lambda})}{J_l(\bar{r}\sqrt{\lambda})}.$$

Jedem $\sigma > 0$ entsprechen unendlich viele positive Werte λ; für $\sigma = 0$ hat der kleinste zugehörige Eigenwert den Wert null;

nimmt σ negative Werte an, so wird der kleinste Eigenwert negativ, und mit abnehmendem σ erhalten wir, da jeder Eigenwert eine monotone Funktion von σ ist, eine wachsende Schar negativer Eigenwerte, deren Anzahl für jedes beschränkte σ endlich ist, aber für $\sigma \to -\infty$ gegen unendlich strebt [1]), wobei jeder negative Eigenwert gegen $-\infty$ abnimmt. Da es andrerseits für jedes negative σ unendlich viel positive Eigenwerte gibt, müssen auch für $\sigma \to -\infty$ unendlich viel Eigenwerte positiv bleiben. Wir wollen diese beiden Scharen vergleichen.

Wie Pockels l. c. gezeigt hat, entspricht jedem Wert

$$\sigma = -\frac{l}{\bar{r}}$$

ein Eigenwert null, da für sehr kleine Werte des Arguments

$$J_l(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+l+1)}$$

angenähert durch $\frac{1}{\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^l$, also $\frac{J_l'(\bar{r}\sqrt{\lambda})}{J_l(\bar{r}\sqrt{\lambda})}$ durch $\frac{l}{\bar{r}\sqrt{\lambda}}$ ersetzt werden kann. Beim Durchgang durch diese Werte $\sigma = -\frac{l}{\bar{r}}$ kommt also immer ein neuer negativer Eigenwert hinzu; die Schar der für $\sigma \to -\infty$ gegen $-\infty$ strebenden Eigenwerte besitzt mithin die Größenordnung $|\sigma|$.

Bezeichnet $A_\sigma(\lambda)$ die Anzahl der unter einem Wert λ gelegenen Eigenwerte bei festem σ, so gilt demnach

$$A_{\sigma<0}(0) = [|\sigma|\bar{r}] + 1.$$

Andrerseits besteht allgemein für die Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in einem Gebiet G für $\sigma = 0$ die asymptotische Verteilungsformel

$$A_0(\lambda) \geqq \frac{f}{4\pi}\lambda + c\sqrt{\lambda}\log\lambda,$$

wo f den Flächeninhalt von G darstellt [2]). Da ferner die Gesamtanzahl der bis zu einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte für negative σ wegen der monotonen Abhängigkeit der Eigenwerte von σ größer als die entsprechende Anzahl für $\sigma = 0$ ist:

$$A_{\sigma<0}(\lambda) \geqq A_0(\lambda),$$

so ist, wenn wir für λ den Wert $c|\sigma|^s$, $c > 0$, $s > 1$ wählen,

1) Vergl. das S. 11 Fußnote 1 zit. Buch von Pockels S. 182 ff.

2) Vergl. die S. 4 Fußnote 1 zit. Abhandlung von Courant S. 46.

$A_{\sigma<0}(c|\sigma|^s)$ mindestens von der Größenordnung $|\sigma|^s$; demnach gilt

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{A_\sigma(0)}{A_\sigma(c|\sigma|^s)}=0;\qquad c>0,\ s>1.$$

Das Resultat bleibt bestehen, wenn σ auf der Peripherie des Kreises nicht konstant, sondern eine stückweise stetige Funktion ist, da die Eigenwerte zu der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sigma u$ zwischen denen liegen, die den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sigma_{\mathrm{Min}}u$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sigma_{\mathrm{Max}}u$ entsprechen. Die Größenordnungen von Zähler und Nenner bleiben demnach bei der allgemeinen Randbedingung erhalten, und damit auch die obige asymptotische Beziehung.

Pockels zeigt ferner auf Grund der Reihenentwicklung der Besselschen Funktionen, daß für unendlich große negative λ

$$\sigma\sim-\sqrt{-\lambda}$$

gilt, da sich $\frac{J_l'(x)}{J_l(x)}$ für jedes l für unendlich wachsende x wie $-\operatorname{tg}x$ verhält, daher für unendlich große imaginäre Werte $x=i\bar{r}\sqrt{-\lambda}$ asymptotisch gleich $-i$ wird.

Jeder negative Eigenwert nimmt demnach bei konstantem σ für $\sigma\to-\infty$ wie $-\sigma^2$ ab; die gleiche Größenordnung gilt somit auch, wenn σ eine stückweise stetige Funktion auf der Peripherie des Kreises ist. Da wir andrerseits als obere Grenze der positiven Eigenwerte den Wert $c|\sigma|^s$ gewählt hatten, wird die asymptotische Beziehung für $s>2$ bedeutungslos; wir wählen daher s zwischen den Grenzen

$$1<s\leqq 2.$$

§ 2. Übertragung auf die Differentialgleichung $L(u)+\lambda ku=0$ im Kreis.

Wir wollen jetzt diese Aussage auf die allgemeine partielle sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L(u)+\lambda ku=p\Delta u+p_xu_x+p_yu_y+(-q+\lambda k)u=0$$

übertragen, wo $p>0$, p_x, p_y, q und $k>0$ stetige Funktionen im Kreise K sein mögen.

Zunächst sei die Differentialgleichung

$$p\Delta u+p_xu_x+p_yu_y+\lambda ku=0 \tag{2}$$

in K gegeben; die Größenordnung des Nenners der asymptotischen Beziehung bleibt erhalten, da für diese Differentialgleichung

$$A(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \iint_K \frac{k}{p}\, dx\, dy$$

ist; andrerseits gilt nach Courant für den $n$ten Eigenwert dieser Differentialgleichung

$$\lambda_n = \text{Max Min} \left\{ \iint_K p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy + \int_R p\sigma\varphi^2\, ds \right\} = \text{Max Min}\, \mathfrak{D}_K[\varphi],$$

wenn φ irgend eine in K stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, die den Bedingungen

$$\iint_K k\varphi^2\, dx\, dy = 1,$$
$$\iint_K k\varphi v_i\, dx\, dy = 0 \qquad i = 1, \ldots n-1$$

genügt, wobei die v_i irgend ein System stückweise stetiger Funktionen in K darstellen.

Es seien $\sigma = \text{const} < 0$ und p_m, p_M, k_m, k_M die positiven Minimal- und Maximalwerte von p und k. Dann ist für negative Eigenwerte

$$\lambda_n^{(\sigma)} > \frac{p_m}{k_m} \text{Max Min} \left\{ \iint_K (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy + \frac{p_M}{p_m} \int_R \sigma\varphi^2\, ds \right\}$$

bei den Nebenbedingungen

$$\iint_K \varphi^2\, dx\, dy = 1$$
$$\iint_K \varphi v_i\, dx\, dy = 0, \qquad i = 1, \ldots n-1.$$

Die rechte Seite stellt, von dem konstanten Faktor $\frac{p_m}{k_m}$ abgesehen, den $n$ten Eigenwert der Differentialgleichung (1) bei der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{p_M}{p_m}\sigma u = \tau u$$

dar. Bezeichnen wir diesen mit $\mu_n^{(\tau)}$, so gilt

$$\lambda_n^{(\sigma)} > \frac{p_m}{k_m} \mu_n^{(\tau)}$$

und entsprechend

$$\lambda_n^{(\sigma)} < \frac{p_M}{k_M} \mu_n^{(\varrho)}; \qquad \varrho = \frac{p_m}{p_M}\sigma.$$

Daraus folgt, da bei den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\tau}{\varrho} u$ der Eigenwert μ_n für die Werte $\frac{\tau}{\varrho} = -\frac{n}{r}$ verschwindet, und daher bis

zum Werte σ:

$$\left[\frac{p_M}{p_m}|\sigma|\bar{r}\right]+1 \text{ bezw. } \left[\frac{p_m}{p_M}|\sigma|\bar{r}\right]+1$$

negative Eigenwerte vorhanden sind, daß auch die Anzahl der negativen λ_n die Größenordnung $|\sigma|$ besitzt; demnach besteht auch für die Gleichung (2) die Beziehung

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\frac{A_\sigma(0)}{A_\sigma(c|\sigma|^s)}=0; \qquad c>0,\ 1<s\leqq 2.$$

Ferner gilt auch hier, daß die Größenordnung der absoluten Beträge aller Eigenwerte λ_n für $\sigma\to-\infty$ gleich σ^2 ist, da $\mu_n^{(x)}$ und $\mu_n^{(y)}$ nach diesem Gesetz gegen $-\infty$ streben.

Enthält die Differentialgleichung noch das Glied $-qu$, so bleibt das asymptotische Gesetz für die Anzahl und die Größenordnung der negativen Eigenwerte bestehen, da bei Variation von q die Änderung jedes Eigenwerts unabhängig von n und σ gleichmäßig beschränkt ist; daher setzen wir weiterhin die Funktion $q=0$, um die Formeln möglichst zu vereinfachen.

§ 3. Übertragung auf beliebige Gebiete.

Wir wollen schließlich unsre asymptotische Beziehung auf beliebige Gebiete G übertragen, deren Rand R aus endlich vielen sich unter endlichen Winkeln schneidenden, stetig gekrümmten Kurvenbögen besteht.

Zunächst ist klar, daß die Beziehung auch für einen Kreissektor gilt, wenn wir auf dem Bogen die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu}=\sigma u$, auf den Radien die Randbedingung $u=0$ oder keine Randbedingung vorschreiben, wobei sich die Beziehung $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$ von selbst einstellt. Auch hier ist

$$\sigma=-\sqrt{\lambda}\,\frac{J_l'(\bar{r}\sqrt{\lambda})}{J_l(\bar{r}\sqrt{\lambda})};$$

dabei ist der Index l der Besselschen Funktion nicht ganz; sondern es gilt, wenn γ den Winkel des Kreissektors bezeichnet

$$l=\frac{n\pi}{\gamma};$$

die Differentialgleichung (1) hat demnach die Eigenwerte null für die Werte

$$\sigma=-\frac{n\pi}{\gamma\bar{r}};$$

d. h. die Anzahl der negativen Eigenwerte ist

$$A_{\sigma<0}(0) = \left[\frac{\gamma\bar{r}}{\pi}|\sigma|\right]+1,$$

demnach wie früher von der Größenordnung $|\sigma|$ und hieraus folgt die Gültigkeit des asymptotischen Gesetzes für die Differentialgleichungen (1) und (2).

Als Größenordnung der absoluten Beträge der negativen Eigenwerte für $\sigma \to -\infty$ ergibt sich wieder σ^2.

Ist jetzt G ein Gebiet der oben beschriebenen Beschaffenheit, so können wir G durch grade Linien, die durch die Ecken gehen, ohne dort die Äste der Randkurve zu berühren, und durch endlich viel andre Graden in eine endliche Zahl von Dreiecken zerlegen, die entweder gradlinig sind oder von zwei Graden und einem Teil des Randes R von G begrenzt werden.

Lassen wir auf den gradlinigen Teilstrecken die Stetigkeitsbedingung fort, wobei sich von selbst die Beziehung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ einstellt, und bezeichnet λ_n den $n$ten Eigenwert von G, $\underline{\lambda}_n$ die $n$te der nach wachsender Größe geordneten Zahlen aus der Gesamtmenge der zu den Teilgebieten $G^{(j)}$ bei keiner Randbedingung auf den Teilgraden bezw. der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auf den Randstücken gehörigen, mit der richtigen Vielfachheit gezählten Eigenwerte, so gilt der Satz:

$$\text{I.} \qquad \lambda_n \geqq \underline{\lambda}_n.$$

Soll andrerseits auf den gradlinigen Teilstrecken die Randbedingung $u = 0$ gelten, und bezeichnet $\bar{\lambda}_n$ die $n$te der nach wachsender Größe geordneten Zahlen aus der Gesamtmenge der zu den Teilgebieten $G^{(j)}$ und der Randbedingung $u = 0$ auf den Teilgraden, bezw. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auf den Randstücken gehörigen, mit der richtigen Vielfachheit gezählten Eigenwerte, so erhalten wir die Beziehung:

$$\text{II.} \qquad \lambda_n \leqq \bar{\lambda}_n.$$

Diese Sätze und ihre Beweise entsprechen vollkommen den Sätzen 6 und 8 der Courantschen Abhandlung[1]).

Da negative Eigenwerte in den Gebieten $G^{(j)}$, die nur gradlinige Begrenzungsstücke enthalten, nicht vorkommen, brauchen wir uns nur mit den Teilgebieten zu beschäftigen, deren Begrenznng aus zwei graden Linien und einem Stück von R besteht.

1) S. die S. 4 Fußnote 1 zit. Abhandlung S. 22—23.

Diese transformieren wir punktweise auf einen Kreissektor, und zwar wählen wir, wenn die Gleichung der Kurve durch

$$\varrho = f(\vartheta)$$

gegeben ist, und $\bar{r}$ den Radius des Kreises bezeichnet, die Transformation

$$\varrho' = \varrho \frac{\bar{r}}{f(\vartheta)}, \qquad \vartheta' = \vartheta$$

wobei wir verlangen, daß allgemein für alle $G^{(\nu)}$

$$\left| \frac{f'(\vartheta)}{f(\vartheta)} \right| \leqq M < 1$$

ist. Dies ist z. B. dadurch zu erreichen, daß wir die bei Courant l. c. S. 40 geschilderte Quadrateinteilung eines Gebietes G und die dort ausgeführte Konstruktion eines Randstreifens von G benutzen, indem wir die Quadrateinteilung hinreichend fein wählen und diejenigen Randgebiete, die von einem Stück des Randes, zwei parallelen und einer dazu senkrechten Graden begrenzt werden, in ein gradliniges und ein krummliniges Dreieck zerlegen. Dann ergibt sich weiter, daß $f^2(\vartheta)$ auf R gleichmäßig nach oben und unten beschränkt ist, sodaß bei festem $\bar{r}$:

$$0 < a \leqq \frac{f^2(\vartheta)}{\bar{r}^2} \leqq A$$

gilt. Setzen wir

$$p(\varrho, \vartheta) = p'(\varrho', \vartheta'), \qquad \varphi(\varrho, \vartheta) = \varphi'(\varrho', \vartheta'),$$

so hat das Dirichletsche Integral für den Kreissektor $S^{(\nu)}$ die Form:

$$D_{S^{(\nu)}}[\varphi'] = \iint_{S^{(\nu)}} p' \left(\varphi_{\varrho'}'^2 + \frac{1}{\varrho'^2} \varphi_{\vartheta'}'^2 \right) \varrho' \, d\varrho' \, d\vartheta',$$

während

$$\begin{aligned} D_{G^{(\nu)}}[\varphi] &= \iint_{G^{(\nu)}} p \left(\varphi_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2} \varphi_\vartheta^2 \right) \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \\ &= \iint_{S^{(\nu)}} p' \left\{ \varphi_{\varrho'}'^2 \left(1 + \frac{f'^2(\vartheta')}{f^2(\vartheta')} \right) + \frac{\varphi_{\vartheta'}'^2}{\varrho'^2} - 2 \frac{f'(\vartheta')}{f(\vartheta')} \varphi_{\varrho'}' \frac{\varphi_{\vartheta'}'}{\varrho'} \right\} \varrho' \, d\varrho' \, d\vartheta' \end{aligned}$$

wird; denn aus

$$\begin{aligned} \varphi_\varrho &= \varphi_{\varrho'} \frac{\partial \varrho'}{\partial \varrho} \qquad\qquad = \varphi_{\varrho'}' \frac{\bar{r}}{f(\vartheta')}, \\ \varphi_\vartheta &= \varphi_{\varrho'} \frac{\partial \varrho'}{\partial \vartheta} + \varphi_{\vartheta'} = -\varphi_{\varrho'}' \varrho \bar{r} \frac{f'(\vartheta')}{f^2(\vartheta')} + \varphi_{\vartheta'}' \end{aligned}$$

folgt

$$\varphi_\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}\varphi_\vartheta^2 = \frac{\bar r^2}{f^2(\vartheta')}\left\{\varphi_{\varrho'}'^2\left(1+\frac{f'^2(\vartheta')}{f^2(\vartheta')}\right)+\frac{\varphi_{\vartheta'}'^2}{\varrho'^2}-\frac{2f'(\vartheta')}{f(\vartheta')}\varphi_{\varrho'}'\frac{\varphi_{\vartheta'}'}{\varrho'}\right\},$$

während

$$\varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \frac{f^2(\vartheta')}{\bar r^2}\varrho'\, d\varrho'\, d\vartheta'$$

ist. Für $\sigma =$ const ist das Randintegral

$$\int_R p\sigma\varphi^2\, ds = \int_P p'\sigma\varphi'^2\frac{ds}{ds'}\, ds',$$

wobei

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{f(\vartheta')}{\bar r}\sqrt{1+\frac{f'^2(\vartheta')}{f^2(\vartheta')}}$$

auf Grund der von uns gewählten Quadrateinteilung von G bei festem $\bar r$ ein Maximum B und ein Minimum b auf R hat:

$$0<b\leqq\frac{ds}{ds'}\leqq B.$$

Es gilt demnach für $\sigma<0$, da

$$2\left|\varphi_{\varrho'}'\frac{\varphi_{\vartheta'}'}{\varrho'}\right|\leqq\varphi_{\varrho'}'^2+\frac{\varphi_{\vartheta'}'^2}{\varrho'^2},$$

also

$$\iint_{G^{(\omega)}} p\left(\varphi_\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}\varphi_\vartheta^2\right)\varrho\, d\varrho\, d\vartheta \leqq\iint_{S^{(\omega)}} p'\left\{\varphi_{\varrho'}'^2(1+M^2+M)+\frac{\varphi_{\vartheta'}'^2}{\varrho'^2}(1+M)\right\}\varrho'\, d\varrho'\, d\vartheta'$$

und andrerseits

$$\iint_{G^{(\omega)}} p\left(\varphi_\varrho^2+\frac{1}{\varrho^2}\varphi_\vartheta^2\right)\varrho\, d\varrho\, d\vartheta \geqq\iint_{S^{(\omega)}} p'\left\{\varphi_{\varrho'}'^2(1-M)+\frac{\varphi_{\vartheta'}'^2}{\varrho'^2}(1-M)\right\}\varrho'\, d\varrho'\, d\vartheta'$$

ist,

$$\mathfrak{D}_{G^{(\omega)}}[\varphi] = D_{G^{(\omega)}}[\varphi]+\int_{R^{(\omega)}} p\sigma\varphi^2\, ds\leqq(1+M^2+M)\, D_{S^{(\omega)}}[\varphi'] +b\int_{P^{(\omega)}} p'\sigma\varphi'^2\, ds'$$

und andrerseits

$$\mathfrak{D}_{G^{(\omega)}}[\varphi]\geqq(1-M)\, D_{S^{(\omega)}}[\varphi']+B\int_{P^{(\omega)}} p'\sigma\varphi'^2\, ds'.$$

Da sich die Nebenbedingungen für

$$k(\varrho,\vartheta) = k'(\varrho',\vartheta'),\quad v_i(\varrho,\vartheta) = v'(\varrho',\vartheta')$$

in

$$\iint\limits_{G^{(j)}} k\varphi^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \iint\limits_{S^{(j)}} k'\varphi'^2 \frac{f^2(\vartheta')}{\bar{r}^2} \varrho'\, d\varrho'\, d\vartheta' = 1$$

$$\iint\limits_{G^{(j)}} k\varphi v_i \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \iint\limits_{S^{(j)}} k'\varphi' v_i' \frac{f^2(\vartheta')}{\bar{r}^2} \varrho'\, d\varrho'\, d\vartheta' = 0 \qquad i = 1, \ldots n-1$$

transformieren, folgt für negative Eigenwerte

$$\mu_n^{\sigma}(G^{(j)}) \leqq \mu_n^{\tau}(S^{(j)}) \frac{1 + M^2 + M}{A}, \qquad \tau = \frac{b}{1 + M^2 + M}\sigma,$$

$$\mu_n^{\sigma}(G^{(j)}) \geqq \mu_n^{\psi}(S^{(j)}) \frac{1 - M}{a}, \qquad \psi = \frac{B}{1 - M}\sigma.$$

$\mu_n^{\tau}(S_j)$ und $\mu_n^{\psi}(S_j)$ stellen die n-ten Eigenwerte der Differentialgleichung (2) für den Kreissektor S_j bei den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{matrix}\tau \\ \psi\end{matrix} u$ dar, und nach S. 25 besitzt die Anzahl der negativen Eigenwerte dieser Differentialgleichung die Größenordnung $|\sigma|$. Mithin besitzt die Anzahl der negativen Eigenwerte von $G^{(j)}$ auch die Größenordnung $|\sigma|$, und demnach besteht für $G^{(j)}$ das Gesetz:

$$\lim_{\sigma \to -\infty} \frac{A_\sigma(0)}{A_\sigma(c|\sigma|^s)} = 0; \qquad c > 0,\ 1 < s \leqq 2.$$

Ferner folgt aus den beiden Ungleichungen, daß die Größenordnung der absoluten Beträge der negativen Eigenwerte von $G^{(j)}$ für $\sigma \to -\infty$ gleich σ^2 ist.

Nach I. ist der $n$te Eigenwert von $G \geqq$ der $n$ten Zahl aus der Gesamtheit der Eigenwerte der $G^{(j)}$, wenn wir auf den Teilgraden keine Randbedingung vorschreiben. Die Gesamtheit der negativen Eigenwerte der $G^{(j)}$ hat nach Obigem die Größenordnung $|\sigma|$, da dies für jedes $G^{(j)}$ einzeln gilt, und es nur endlich viel Gebiete $G^{(j)}$ gibt; demnach hat die Gesamtheit der negativen Eigenwerte von G höchstens die Größenordnung $|\sigma|$ und es gilt für G:

$$\lim_{\sigma \to -\infty} \frac{A_\sigma(0)}{A_\sigma(c|\sigma|^s)} = 0; \qquad c > 0,\ 1 < s \leqq 2.$$

Da nach II. der $n$te Eigenwert von $G \leqq$ der $n$ten Zahl aus der Gesamtheit der Eigenwerte der $G^{(j)}$ bei der Randbedingung $u = 0$ auf den Teilgraden ist, so folgt andrerseits, daß die Gesamtheit der negativen Eigenwerte von G mindestens die Größenordnung $|\sigma|$ besitzt; sie besitzt daher genau die Größenordnung $|\sigma|$.

Ferner ergibt sich, wenn wir keine Randbedingung auf den Teilgraden vorschreiben, daß die Größenordnung der absoluten Beträge der negativen Eigenwerte von G für $\sigma \to -\infty$ höchstens

σ^2 ist, während umgekehrt bei der Randbedingung $u = 0$ auf den Teilgraden eine Größenordnung $\geqq \sigma^2$ folgt; die Größenordnung der absoluten Beträge der negativen Eigenwerte von G für $\sigma \to -\infty$ ist demnach genau gleich σ^2.

Auch bei der allgemeinen Differentialgleichung in einem Gebiet G der oben beschriebenen Beschaffenheit können wir die Beschränkung $\sigma = \text{const}$ auf R aufheben und σ als stückweise stetige Funktion auf R wählen; die Anzahl der negativen Eigenwerte wächst dann wie irgend ein Mittelwert der Funktion σ auf R und die Größenordnung der absoluten Beträge der negativen Eigenwerte wie das Quadrat irgend eines Mittelwerts von σ auf dem Rande.

Der Beweis ist einer Übertragung auf dreidimensionale Eigenwertprobleme in Gebieten fähig, die von endlich vielen stetig gekrümmten Flächenstücken begrenzt werden, die sich gegenseitig nicht berühren, wohl aber Ecken und Kanten bilden dürfen; doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

Lebenslauf.

Ich, Antonie Stern, Tochter des Bankiers Siegfried Stern und seiner Frau Bertha geb. Bendix, bin am 7. Oktober 1892 in Dortmund geboren. Von Ostern 1899—1902 besuchte ich die private Vorbereitungsschule von Fräulein Antonie Siedhoff, von Ostern 1902—1908 die städtische höhere Mädchenschule zu Dortmund. Ostern 1908 trat ich in die Obersekunda der realgymnasialen Kurse für Mädchen in Bonn, jetzt Studienanstalt, ein und bestand Ostern 1911 am städtischen Realgymnasium in Bonn die Reifeprüfung.

Ostern 1912 bezog ich die Universität Bonn, wo ich Vorlesungen über Mathematik und Physik hörte; Ostern 1913 wurde ich an der Universität Göttingen immatrikuliert, an der ich mich auch dem Studium der Chemie zuwandte. Hier legte ich im Juli 1918 die Prüfung für das höhere Lehramt in Mathematik, Physik und Chemie für die erste Stufe ab. Dann studierte ich noch mit mehrfacher Unterbrechung in Berlin, Münster und wieder in Göttingen.

Ich besuchte Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Dozenten:

in Bonn: Bühler, Hammacher, Hausdorff, Kayser, London, Müller, Strasburger, Study,

in Göttingen: Bebrens, Born, Carathéodory, Courant, Debye, Haar, Hartmann, Hecke, Hilbert, Husserl, Klein, Landau, Lietzmann, Mügge, G. E. Müller, Nelson, Riecke, Toeplitz, Voigt, Wallach, Wedekind, Wiechert, Windaus,

in Berlin: Carathéodory, Einstein, Planck, E. Schmidt,

in Münster: Courant, Plaßmann.

Allen meinen Lehrern spreche ich meinen Dank aus; vor allem werde ich Herrn Prof. Carathéodory und Herrn Prof. Courant stets die herzlichste Dankbarkeit bewahren für das freundliche Interesse, das sie mir entgegengebracht haben und die Anleitung, die ich von ihnen empfangen durfte.

$P_{7,7}(\cos\vartheta)\cos 7\varphi + \mu P_7(\cos\vartheta) = 0.$

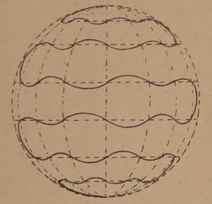
Figur 1.

$P_{8,8}(\cos\vartheta)\cos 8\varphi$
$+ \mu P_{8,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{8}\right) = 0.$

Figur 2.

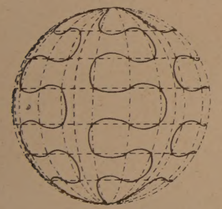
$P_{10,10}(\cos\vartheta)\cos 10\varphi$
$+ \mu P_{10,5}(\cos\vartheta)\cos 5\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{10}\right) = 0.$

Figur 3.



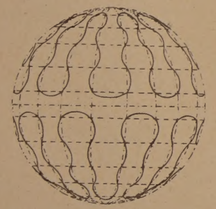
$\mu P_{7,7}(\cos\vartheta)\cos 7\varphi$
$+ P_{7,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{7}\right) = 0.$

Figur 4.



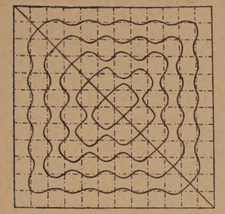
$\mu P_{9,9}(\cos\vartheta)\cos 9\varphi$
$+ P_{9,3}(\cos\vartheta)\cos 3\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{9}\right) = 0.$

Figur 5.



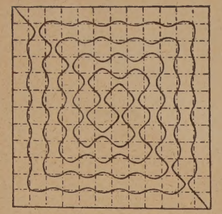
$\mu P_{10}(\cos\vartheta) + P_{10,9}(\cos\vartheta)\cos 9\varphi = 0.$

Figur 6.



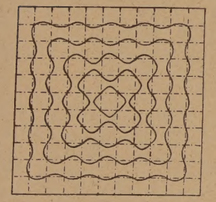
$\sin 12x \sin y + \sin x \sin 12y = 0.$

Figur 7.



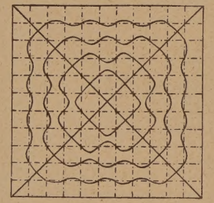
$\sin 12x \sin y + \mu \sin x \sin 12y = 0,$
μ hinreichend nahe an 1.

Figur 8.



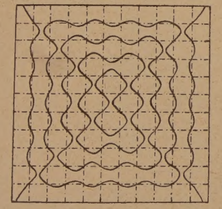
$\sin 11x \sin y + \sin x \sin 11y = 0.$

Figur 9.



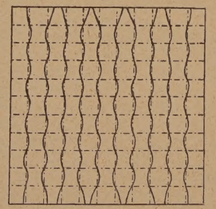
$\sin 11x \sin y - \sin x \sin 11y = 0.$

Figur 10.



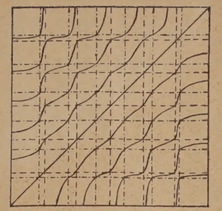
$\sin 11x \sin y - \mu \sin x \sin 11y = 0,$
μ hinreichend nahe an 1.

Figur 11.



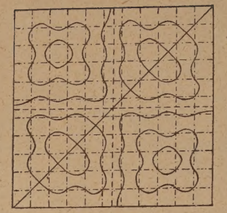
$\sin 11x \sin y - \mu \sin x \sin 11y = 0,$
$\mu > 0$ hinreichend nahe an 0.

Figur 12.



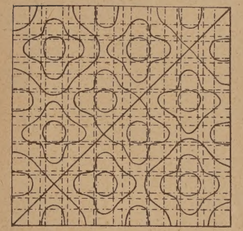
$\sin 7x \sin 6y - \sin 6x \sin 7y = 0.$

Figur 13.



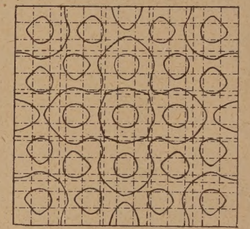
$\sin 11x \sin 2y - \sin 2x \sin 11y = 0.$

Figur 14.



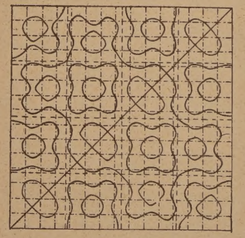
$\sin 13x \sin 8y - \sin 8x \sin 13y = 0.$

Figur 15.



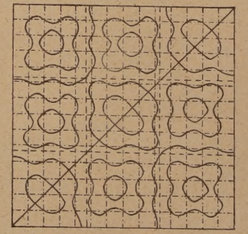
$\sin 13x \sin 5y + \sin 5x \sin 13y = 0.$

Figur 16.



$\sin 15x \sin 4y - \sin 4x \sin 15y = 0.$

Figur 17.



$\sin 14x \sin 3y - \sin 3x \sin 14y = 0.$

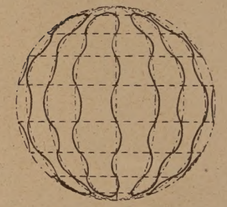
Figur 18.

$P_{7,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{6}\right)$
$+ \mu P_{7,6}(\cos\vartheta)\cos 6\varphi = 0.$

Figur 19.

$P_{9,7}(\cos\vartheta)\cos 7\varphi + \mu P_9(\cos\vartheta) = 0.$

Figur 20.

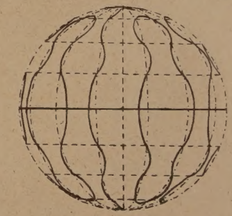


$P_{8,8}(\cos\vartheta)\cos 8\varphi + \mu P_8(\cos\vartheta) = 0.$

Figur 21.

$P_{9,4}(\cos\vartheta)\cos 4\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{5}\right)$
$+ \mu P_{9,5}(\cos\vartheta)\cos 5\varphi = 0.$

Figur 22.



$P_{9,7}(\cos\vartheta)\cos 7\varphi + \mu P_{9,1}(\cos\vartheta)\cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon\pi}{7}\right) = 0.$

Figur 23.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 3

I. Über die Knotenlinien der zu der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gehörigen Eigenfunktionen des Quadrats und der Kugelfläche.

§ 1. Nichtgültigkeit des Sturmschen Satzes für partielle Differentialgleichungen; Vorkommen der Gebietszahlen 2 und 3 und aller Gebietszahlen $\equiv 0, 2, 3\,(4)$ auf der Kugelfläche 6

§ 2. Vorkommen der Gebietszahl 2 beim Quadrat 10

§ 3. Erläuterung der bei den Quadratzeichnungen benutzten Methode . 11

§ 4. Einige Einzelfälle 13

§ 5. Obere und untere Grenze der Gebietsanzahl 15

§ 6. Unmöglichkeit eines asymptotischen Gesetzes der Gebietsanzahl . 17

§ 7. Bemerkung über dreidimensionale Probleme 19

II. Eine asymptotische Eigenschaft der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von der Randbedingung.

§ 1. Herleitung des Gesetzes für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ im Kreis 20

§ 2. Übertragung auf die Differentialgleichung $L(u) + \lambda k u = 0$ im Kreis 22

§ 3. Übertragung auf beliebige Gebiete 24